

TD₁ – Révisions d'analyse

Exercice 1 ★

1. Linéariser $\sin^6(x)$ (i.e. l'exprimer comme somme de cos et de sin, sans puissances).
2. Exprimer $\cos(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Exercice 2 ★★

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : (E) : \sin 4x - \sin x = 0$.
2. Déterminer un polynôme P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 4x - \sin x = P(\cos x) \sin x$.
3. Calculer les racines de P , en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 3 ★★

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2 \cos(2x) = \cos(x) \sin(x), \quad \cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) = 0 \quad \text{et} \quad 2x + \cos(x) - \pi = 0$$

Exercice 4 ★

Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives :

$$f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) \text{ et } g : x \mapsto \cos(\arccos(x)).$$

Exercice 5 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}$ et a, b des réels. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(ak + b)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$. En déduire

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right).$$

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. f atteint-elle ses bornes ?

Exercice 7 ★

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de f et g où

$$f : x \mapsto (3x^2 + x - 5) e^{-x} \text{ et } g : x \mapsto \frac{2x - 1}{x + 1}.$$

Exercice 8 ★★

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x ,

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2) P'_n(x) - (2n + 1)xP_n(x)$$

où l'on a posé $P_n(x) = (1 + x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n)}(x)$.

2. Établir que, pour tout entier naturel n , P_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.
 3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f ; en déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x

$$P_{n+1}(x) + (2n + 1)xP_n(x) + n^2(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4. Déterminer $P_n(0)$ en fonction de n , selon la parité de n .

Exercice 9 ★★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et P un polynôme réel. On suppose que P possède $n + 1$ racines distinctes dans $]a, b[$.

1. Montrer que P' possède au moins n racines distinctes dans $]a, b[$. Que peut-on dire de P et P' lorsque $\deg(P) = n + 1$?
 2. Montrer que le polynôme $P^{(n)}$ possède au moins une racine dans $]a, b[$.

Exercice 10 ★★

Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 11 ★★

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[0, a]$, telle que : $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. On pose, pour $x \in]0, a]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Montrer que g est dérivable sur $]0, a]$, et calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, a]$.
 2. Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que la tangente en c à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Exercice 12 ★★

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$.

Exercice 13 ★★

Montrer que si f est dérivable sur un intervalle où f' ne s'annule pas, alors f est injective.

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(Oral 2014)

Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout x et y et $f'(0) = 1$.

1. Montrer que $f(0) = 1$.
 2. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
 3. Montrer que $f' = f$ et conclure
-

Exercice 15 ★★★

(Oral 2011)

Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation

$$\left(\frac{a+x}{2}\right)^{\frac{a+x}{2}} = a^x$$

On pourra étudier une fonction bien choisie.

Exercice 16 ★★★

(Oral 2017)

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 17 ★★★

(Oral 2017, 2018)

On définit la fonction $\varphi : x \mapsto \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$.

1. Montrer que $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi(5) \leq \frac{3\pi}{2}$
2. Calculer la valeur exacte de $\varphi(5)$.
3. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
4. Résoudre $\varphi(x) = \frac{\pi}{4}$